View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Repository of Gomel State University

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В.И. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON PERIODIC SOLUTIONS OF RICCATI EQUATIONS

V.I. Mironenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

На примере уравнения Риккати описан метод построения дифференциальных уравнений с заданным частным решением, эквивалентных заданному уравнению в смысле совпадения отражающих функций.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, отражающая функция, периодическое решение.*

On the example of the Riccati equation the method of construction of differential equations with a given partial solution and the same reflecting function as the given equation is described.

Keywords: *differential equation, reflecting function, periodic solution.*

Введение

В работе [1] для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x), \qquad (0.1)$$

где $t\in R,\ x\in R^n$, с общим решением в форме Коши $x=\varphi(t;t_0,x_0)$, было введено понятие отражающей функции $F(t,x)$. Отражающая функция определяется формулой

$$F(t,x):=\varphi(-t;t,x).$$

Основное свойство отражающей функции состоит в том, что для любого решения $x(t)$ системы (0.1) верно тождество $F(t,x(t))\equiv x(-t)$. Благодаря этому для 2ω-периодической по t системы (0.1) отображение Пуанкаре $\Pi(x)$ за период $[-\omega,\omega]$ задается формулой $\Pi(x)\equiv F(-\omega,x)$. Поэтому решение $\varphi(t;\omega,x_0)$ системы (0.1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда оно продолжимо на $[-\omega,\omega]$ и $F(-\omega,x_0)=x_0$.

Отображение Пуанкаре для системы (0.1) определяется [2, с. 280] через общее решение этой системы. Поэтому создается впечатление, что формулу для вычисления отображения Пуанкаре в явном виде можно получить только тогда, когда система (0.1) интегрируется хотя бы в квадратурах. Это мнение ошибочно, так как отображение Пуанкаре можно найти через отражающую функцию по формуле

$$\Pi(x)=F(-\omega,x),$$

а для отражающей функции верно

Утверждение **0.1** [3, 4]. *Дифференцируемая функция* $F(t,x)$ *является отражающей функцией системы* (0.1) *тогда и только тогда, когда эта функция является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0,$$

$$F(0,x)\equiv x. \qquad (0.2)$$

Решение задачи (0.2) иногда удается найти даже тогда, когда система (0.1) не может быть проинтегрирована в квадратурах. Такой случай, например, представляется тогда, когда $X(t,x)$ нечетна по t, т. е. когда $X(-t,x)+X(t,x)\equiv 0$.

В этом случае функция $F(t,x)\equiv x$ является решением задачи (0.2) и, значит, отражающей функцией системы (0.1). Другие случаи нахождения отражающей функции читатель найдет в [3], [4], а также в работах Альсевич Л.А., Бельского В.А. [5], Варениковой Е.В. [6], Вересовича П.П., Кастрицы О.А., Майоровской С.В., Мироненко В.В., Zhou Zhengxin и других.

Все системы вида (0.1), обладающие одной и той же отражающей функцией, образуют класс эквивалентности, который весь описывается системами вида

$$\frac{dx}{dt}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}R(t,x)-R(-t,F),$$

где $R(t,x)$ есть любая непрерывно дифференцируемая вектор-функция $F^T=(F_1,...,F_n)^T$ (здесь T есть знак транспонирования).

Важные применения находит

Утверждение **0.2** [3, 4]. *Пусть* $\Delta_i(t,x)$, $i=1,2,3,...,$ *– решения системы*

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta(t,x)=0. \qquad (0.3)$$

Тогда все системы вида

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x)+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_k(t)\Delta_k(t,x),$$

© Мироненко В.И., 2015

где $\alpha_k(t)$ *– нечетные непрерывные скалярные функции, эквивалентны между собой и эквивалентны системе* (0.1).

В данной работе это утверждение применяется к изучению уравнения Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \qquad (0.4)$$

что следует рассматривать как пример использования утверждения 0.2 к уравнениям и системам (0.1) с полиномиальной относительно координат фазового вектора правой частью.

1 О поиске периодических решений уравнения Риккати

Отметим, что заменой в уравнении (0.4) переменной x на $(x + x_0)$, где x_0 есть корень уравнения

$$a(0)x^2 + b(0)x + c(0) = 0,$$

мы всегда добьёмся того, чтобы для уравнения (0.4) выполнялось условие $c(0) = 0$. Поэтому далее будем считать, что это условие всюду выполняется.

Теорема **1.1**. *Пусть для уравнения* (0.4) *функции* $m_0(t)$, $m_1(t)$ *и* $m_2(t)$ *являются решениями системы*

$$\begin{aligned} \dot m_0 + m_1 c - b m_0 &= 0, \\ \dot m_1 + 2m_2 c - 2a m_0 &= 0, \\ \dot m_2 + m_2 b - a m_1 &= 0. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Тогда для них выполнено соотношение

$$m_1^2 - 4m_0 m_2 = const, \qquad (1.6)$$

и для любой нечетной непрерывной функции $\alpha(t)$ *уравнение*

$$\dot x = (a + \alpha m_2)x^2 + (b + \alpha m_1)x + (c + \alpha m_0) \qquad (1.7)$$

эквивалентно уравнению (0.4) *в смысле совпадения отражающих функций.*

Доказательство. Подстановкой

$$\Delta := m_2 x^2 + m_1 x + m_0$$

в уравнение (0.3), где $X(t,x)$ есть правая часть уравнения (0.4), убеждаемся в том, что функция Δ является решением уравнения (0.4).

Дифференцируя выражение $m_1^2 - 4m_1 m_2$ и используя равенства (1.5), убеждаемся в том, что соотношение (1.6) задает первый интеграл системы (1.5). Этот факт и завершает доказательство теоремы.

В том случае, когда $c + \alpha m_0 \equiv 0$, уравнение (1.7) имеет нулевое решение $x(t) \equiv 0$. Поэтому если решение $x(t; -\omega, 0)$ 2ω-периодического уравнения (0.4) продолжимо на $[-\omega; \omega]$, то оно 2ω-периодично. Следующая теорема указывает условия, при которых описанная ситуация возможна.

Теорема **1.2.** *Пусть для* 2ω*-периодического по* t *уравнения* (0.4) *существует нечетная функция* $\alpha = \alpha(t)$, *при которой функции*

$$m_0 := \frac{c}{\alpha}, \quad m_1 := \frac{b m_0 - \dot m_0}{c}$$

доопределяются до непрерывно дифференцируемых на R *функций, а* $k := m_1^2 + \dfrac{2\dot m_1 - 4a m_0}{\alpha}$ *не зависит от* t.

Тогда решение $x = \varphi(t; \omega, 0)$ *уравнения* (0.4) 2ω*-периодично, если только оно продолжимо на отрезок* $[-\omega, \omega]$.

Доказательство теоремы состоит в проверке того факта, что при заданных условиях функции

$$m_0 := \frac{c}{\alpha},$$

$$m_1 := \frac{b m_0 - \dot m_0}{c};$$

$$m_2 := \frac{m_1^2 - k}{4m_0}$$

образуют решение системы (1.5). Поэтому уравнение (0.4) эквивалентно уравнению Бернулли

$$\dot x = (a - \alpha m_2)x^2 + (b - \alpha m_1)x$$

с нулевым решением. Этому нулевому решению и соответствует 2ω-периодическое решение $x = \varphi(t; \omega, 0)$ уравнения (0.4).

2 Построение уравнений Риккати, к которым целесообразно применять разработанную методику

Для построения конкретных примеров уравнений (0.4), удовлетворяющих условиям теоремы, можно поступить следующим образом:

1. Выбираем нечетную непрерывную функцию $\alpha(t)$ и дифференцируемые функции $m_1(t)$ и $b(t)$ произвольным образом.

2. Функцию $m_0(t)$ строим по формуле

$$m_0(t) := c_0 \exp \int_0^t (b(\tau) - \alpha(\tau) m_1(\tau)) d\tau,$$

где c_0 – произвольная постоянная.

3. Строим функцию

$$m_2(t) := \frac{m_1^2 - k}{4m_0},$$

где k – произвольная постоянная.

4. Строим функции $c(t) := \alpha(t) m_0(t)$ и $a(t) := \dfrac{\dot m_1 + 2m_2 c}{2m_0}$.

5. Записываем нужное нам уравнение (0.4).

Заключение

Данная работа предлагает метод, позволяющий в определенных случаях находить начальные данные периодических решений дифференциальных уравнений полиномиального типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

2. *Хенри*, *Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: 1985. – 376 с.

3. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

4. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: Монография / В.И. Мироненко. – Мин. образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.

5. *Бельский*, *В.А*. О построении уравнений Абеля, эквивалентных уравнению вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 55–61.

6. *Варенникова*, *Е.В*. О решениях двухточечной краевой задачи для одной неавтономной дифференциальной системы с квадратичной по фазовым переменным правой частью / Е.В. Варенникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1 (18). – С. 39–42.

Поступила в редакцию 18.12.14.